C*-環の指数理論(作用素環論と指数理論)

綿谷, 安男

数理解析研究所講究録
688 巻 1989 年 98-109

C*-環の指数理論

大阪教育大　綿谷安男　(Yasuo Watatani)

0 はじめに

factor M とその subfactor N に関する指数理論全体は (文献も含めて) 幸崎さんによって説明されるので，ここでは C*環の指数理論について，なぜ，そういう風に定義するかに中心をおいてかいてみる．

C*-環に対する指数の定義は次の3つのことをぼんやりと念頭におかれてつくられている：

① Pimsner-Popa basis

② Kosaki の定義：$\mathrm{Index}\, E = E^{-1}(1)$

③ 半単純リー環の Casimir 元

そこで以上の①，②，③をざっと復習してみよう

1 Pimsner-Popa basis

M を II_1-factor，N をその subfactor とする．今 Jones の index $[M:N] < +\infty$ と仮定しよう。

この時 Pimsner–Popa は次のような orthonormal basis $\{m_j \mid j=1,\dots,n+1\} \subset M$ の存在を示した：

㋐ $E_N(m_j^* m_k)=0 \quad j\neq k$

㋑ $E_N(m_j^* m_j)=1 \quad 1\leq j\leq n$

㋒ $E_N(m_{n+1}^* m_{n+1})$ is a projection of trace $[M:N]-n$.

㋓ n は $[M:N]$ の整数部分

㋔ $m_j e_N$ は partial isometries $(1\leq j\leq n+1)$

㋕ $\sum_{j=1}^{n+1} m_j e_N m_j^* = 1$

㋖ $\sum_{j=1}^{n+1} m_j m_j^* = [M:N]$

㋗ $\forall m\in N$ は $m=\sum_{j=1}^{n+1} m_j y_j$ $\left(\begin{matrix} y_j\in N \\ y_{n+1}\in E_N(m_{n+1}^* m_{n+1})N\end{matrix}\right)$
と一意的に分解できる。

㋕はいいかえると

㋕′ $\forall x\in M \quad \sum_{j=1}^{n+1} m_j E_N(m_j^* x) = x$

となる。C^*-部分環の指数の有限性を定義するのにこの㋕′の性質のみを使うことにする。なぜなら C^*-環では projection が一般には存在しないため，orthonormality は少し強すぎる気がするから。また分解の一意性も C^*-環でははずすことにする。

$\boxed{2}$ Kosakiの Index

$M \supset N$をあるHilbert空間H上の(σ-finite) factorとする。$E: M \longrightarrow N$をfaithful normal conditional expectationとする。MからNへのnormal faithful semifinite operator valued weights全体を$P(M, N)$とおく。$P(M, N)$と$P(N', M')$の間には次のConnesのspatial derivativeの等式を通じて全単射$E \leftrightarrow E^{-1}$がある:

$$\frac{d(\phi \cdot E)}{d\psi} = \frac{d\phi}{d(\psi \cdot E^{-1})}$$

ここでϕはM上の(ψはM′上の)任意のnormal faithful semifinites weightsを動く。

$\boxed{\text{Definition}}$ (Kosaki)

$$\text{Index}\, E = E^{-1}(1)$$

さてKosakiのindex $E < +\infty$の時もPimsner-Popa型のbasis $\{m_1, m_2, \cdots m_n\} \subset M$がとれる:

$$\forall x \in M \qquad x = \sum_i m_i E(m_i^* x)$$

このbasis $\{m_1, \cdots, m_n\}$とE^{-1}は次の関係ある。

$\boxed{\text{Lemma 1}}$

$$\forall x \in N' \qquad E^{-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i x m_i^*$$

特に
$$\mathrm{Index}\, E = E^{-1}(1) = \sum_{i=1}^{n} m_i m_i^*$$

以上により，Indexの理論はある種のbasisの存在を仮定してそこを出発点にしてもかなりの所がおおえそうな気になるでしょう。(たとえそれが論点先取であるというゴマカシに近い側面をもっているにしてもですが。)

$\boxed{3}$ 半単純リー環のCasimir元

Lを$\mathbb{C}$上の半単純リー環とする。$A, B \in L$に対して

$$K(A, B) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}A, \mathrm{ad}B)$$

で定義して，この$K : L \times L \to \mathbb{C}$のことをkilling formという。

$X_1, \cdots, X_n$をLのbasisとし，Kに関するdual basisを$Y_1, \cdots, Y_n$とする；つまり

$$K(X_i, Y_j) = \delta_{ij}$$

となるようとっておく．$\mathcal{U}(L)$をLのuniversal enveloping algebraとする。リー環Lの<u>casimir元</u> Cは$\mathcal{U}(L)$の元として次で定義される：

$$C=\sum_{i=1}^{n}X_i\cdot Y_i \quad \in \mathcal{U}(L)$$

このCasimir元Cは $\mathcal{U}(L)$ のcenterに含まれる。ここでIndex $E=\sum m_i m_i^*$ と比較してみると，どちらもある種のbasis（とそのdual basis）の積の和をとって得られているという共通点に気がつく。そこで C^* 環においてIndexを定義するに当たってもある種のbasis（とそのdual basis）の積の和という形でIndexを定義することにする．するとcasimir元と同じようにその C^* 環のcenterの元になっていることがわかる．

以上の①〜③を念頭において C^* 環のIndexを定義する。が他分野との関連を明示する説明のつごう上，一般の多元環に対して定義をおこなう．

④ Indexの定義

k を可換環で単位元1をもつものとする．$k=\mathbb{Z}$ か $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ 位を描いてくれて十分です。k 上の代数 B とその部分代数 A の組 $B\supset A$ を考える。B と A は1を共有すると仮定する

$\boxed{\text{Definition}}$ $E : B \longrightarrow A$ が <u>conditional expectation</u>

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ Eは A-A-bimodule map で $E(1) = 1$

特に $E^2 = E$ となる. $B \supset A$ が C^*-環の時は positivity を仮定するので Eは必然的に projection of norm one になる.

$\boxed{\text{Definition}}$ a finite family $\{(u_1, v_1), \cdots, (u_n, v_n)\} \subset B \times B$ が <u>quasi-basis</u> for E

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in B$

$$(\#) \quad x = \sum_{i=1}^{n} u_i E(v_i x) = \sum_{i=1}^{n} E(x u_i) v_i$$

$\boxed{\text{Definition}}$ $E : B \longrightarrow A$ を conditional expectation とする

E が of <u>index-finite type</u>

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \{(u_1, v_1), \cdots (u_n, v_n)\} \subset B \times B$: quasi-basis for E

この時

$$\text{Index } E \underset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \in B$$

(ただし C^*-環の時は $v_i = u_i^*$ と, とり直せるので $\text{Index } E = \sum u_i u_i^*$)

$\boxed{\text{Remark}}$ ① Index Eは quasi-basis のとり方には依存しない. ただし Eには依存するので $B \supset A$ という pair

に対する不変量でない所に少しこまる点がある.

② 実は Index E は Center B の元であることがいえる.
これは casimir 元 C が Center $\mathcal{U}(\mathcal{B})$ の元であることと似ている.

③ $B \otimes_A B$ 上に次で積を入れる,(E に依存して).

$$(*) \quad (x \otimes y) \cdot (z \otimes w) \underset{def}{=} xE(yz) \otimes w$$

すると $\{(u_1, v_1), \cdots, (u_n, v_n)\}$ が quasi-basis である
という条件(いささか形がよくない)

$$(\#) \quad \forall x \in B \qquad x = \sum_{i=1}^{n} u_i E(v_i x) = \sum_{i=1}^{n} E(x u_i) v_i$$

がみた目にもっと自然な形

$$(\#\#) \quad \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i \text{ は } B \otimes_A B \text{ の単位元である}$$

(ただし $B \otimes_A B$ 上の積は上の (*) で入れたもの.)
にかき直すことができる.

④ もちろん II_1-factors $M \supset N$ の時に trace からきまる conditional expectation $E: M \to N$ をとれば

$$\mathrm{Index}\, E = [M : N]$$

だし,一般の factors $M \supset N$ については幸崎さんの定義と一致する.

$\boxed{例1}$ Y, X: compact T_2-spaces, $\pi: Y \to X$: covering mapとする. $\pi^*: C(X) \hookrightarrow C(Y)$ が誘導される。

$B = C(Y)$

$A = \pi^*(C(X))$

$d_x = \#\pi^{-1}(x)$ を $x \in X$ 上の fiber の数

$$\begin{cases} X \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ \ \ x \longmapsto d_x \end{cases}$$ が bounded と仮定する

$w: Y \longrightarrow]0,1]$: 連続関数で

$$\sum_{z \in \pi^{-1}(x)} w(z) = 1 \qquad \text{for all } x \in X$$

この時 $E_w: B \longrightarrow A$ という conditional expectation を

$$E_w(f)(y) = \sum_{z \in \pi^{-1}\pi(y)} w(z) f(z)$$

for $f \in B$.

で定義する.

$$\Longrightarrow \mathrm{Index}\, E_w = \frac{1}{w} \in B$$

特に covering sheets の枚数 $d_x = n$ (constant)

$w(y) = \frac{1}{n} \quad \forall y \in Y$ ときめると

$$\mathrm{Index}\, E = n = (\text{被覆度})$$

$\boxed{\text{例2}}$ $e_1, e_2, e_3, \cdots$ を Jones projection とする.
つまり $\tau^{-1} \in \{4\cos^2 \pi/n \mid n=3,4,5,\cdots\} \cup (4,\infty)$ として

$$\begin{cases} e_i e_{i\pm 1} e_i = \tau e_i \\ e_i e_j = e_j e_i & (|i-j| \geq 2) \end{cases}$$

をみたすとする.

$$B_\tau = C^*(1, e_1, e_2, e_3, \cdots)$$

$$A_\tau = C^*(1, e_2, e_3, \cdots)$$

とおく. $\exists E : B_\tau \longrightarrow A_\tau$: conditional expectation
s.t. $E(x e_1 y) = \tau x y$

この時

① $\tau^{-1} \in 4\cos^2 \pi/n$ の場合
　E は of index-finite type で
　$\mathrm{Index}\, E = 4\cos^2 \pi/n$

② $\tau^{-1} \in (4,\infty)$ の場合
　E は index-finite type では<u>ない</u>

もっと一般に Wenzl が構成した subfactors の方法で weakly closure の代わりに norm closure をとってつくった simple な AF-algebras でもよい。

例3 M : finite von Neuman alg with a faithful normal trace τ. $N \subset M$: von Neuman subalgebra. $E: M \to N$ を trace でから決まる normal conditional expectation とする. 次の $\mathrm{Index}\,E = I(M|N)$ の公式は河上さんに依るものです。さらに次の状況を仮定する

$Z(M)$ の minimal projection を $\langle e_i \mid i \in I \rangle$、

$Z(N)$ の 〃 を $\langle f_j \mid j \in J \rangle$

として E: of index finite type となっている

$$\Longrightarrow \mathrm{Index}\,E = I(M|N) = \sum_i \sum_j \frac{[M_{ij} : N_{ij}]}{\tau(e_i f_j)} \tau(f_j) e_i$$

$$\left(\text{ここで } \begin{array}{l} M_{ij} = M e_i f_j \\ N_{ij} = N e_i f_j \end{array} \right)$$

注 実は $E^{-1}(1) \in M$ であることと quasi-basis が有限つでとれることは 一般の von Neuman algebra では一致しないことを河上さんに教えてもらいました. 上の公式は $E^{-1}(1) \in M$ でもよいそうです くわしいことは直接河上さんにきいてもらうほうがまちがいがなくてよいでしょう

例4 離散群 $G \supset H$ に対しては $E: C_r^*(G) \to C_r^*(H)$ の $\mathrm{Index}\,E = [G:H]$ で群の指数と一致する.

Pair $B \supset A$ に対して $E: B \to A$ の Index E を上のように代数的に定義したため, Co algebra の概念の拡張である coring 構造をもつことが示せる。さらに体の分離拡大の概念を環にまで拡張したものも分離拡大ということにすると, $B \supset A$ が C^*-環で E が of index-finite type なら, $B \supset A$ はその意味での分離拡大になっていることも示せる。

5 Index の性質

C^*-環の index についてわかっていることはまだ少ない。

$\boxed{\text{Theorem 2}}$ $B \supset A$: C^*-algebras. $E: B \to A$: conditional expectation of index-finite type. If Index $E \in A$

$$\Longrightarrow (\text{Spectrum of Index}E) \subset \{4\cos^2 \pi/n \mid n = 3, 4, 5, \ldots\} \cup [4, \infty).$$

これ以外に K-theory における transfer との関連などもあるが, どれもまだ初等的な結果ばかりである。もう少し研究して構造論的に何かいえることがわかればよいと思っているがなかなかである。その原因は C^*-環に対して Index を定義するのに意味があるかどうか疑わしいことにあると思っています。

最後に Pimsner-Popa 不等式については Sekine により
私の元の評価が次のように改良されたことを記します.

$\boxed{\text{Proposition 3}}$ $B \supset A$: C^*-algebras で $E : B \to A$ が
a conditional expectation of index-finite type とする

$$\Longrightarrow \quad E(x) \geqq \|\mathrm{Index}\,E\|^{-1} x \qquad \text{for } x \in B_+$$